



ENTRE DE ROCQUENCOURT

# Rapports de Recherche

N° 200

## **SUR L'EFFET DES STOCKS TAMPONS DANS UNE FABRICATION EN LIGNE**

Seconde Partie

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
BP 105

78153 Le Chesnay Cedex  
France  
Tél 954 90 20

Pierre COILLARD  
Jean-Marie PROTH

Avril 1983

# SUR L'EFFET DES STOCKS TAMPONS

## DANS UNE FABRICATION EN LIGNE

Pierre COILLARD\* et Jean-Marie PROTH\*\*

### Seconde Partie

#### RESUME

Ce papier est consacré à l'étude de trois machines identiques fonctionnant en ligne et séparées par deux stocks tampons. Ces machines sont susceptibles de tomber en panne. Nous donnons le taux de production en fonction des maxima des stocks tampons. Les logiciels sont donnés.

#### ABSTRACT

This paper is devoted to a system of three machines through which material must pass. Each machine is subject to failure and two storage buffers are located between these machines. We give the analytical formulation of the production rate in term of the maxima of the storage buffers.

\* Houillères du Bassin de Lorraine, Service Informatique,  
57800 - FREYMING-MERLEBACH, FRANCE.

\*\* INRIA, B.P. 105, 78150 LE CHESNAY, FRANCE.



Nous étudions le cas de trois machines fonctionnant en ligne et séparées par deux stocks tampons. Nous nous limitons au cas de trois machines identiques. Le lecteur verra, cependant, que les systèmes différentiels à résoudre s'obtiennent de la même manière lorsque les machines sont toutes différentes. La solution, par contre, se complique considérablement.

Après avoir donné les notations -introduites dans la première partie pour le cas le plus général- nous montrons comment s'obtiennent les fonctions de répartition lorsque les niveaux des stocks sont strictement situés entre leurs bornes. Puis nous étudions le cas où un ou plusieurs stocks sont à leur maximum ou à leur minimum. Enfin, nous donnons une formulation du taux de production d'un tel système en fonction des niveaux maximum des stocks tampons.

# 1. - NOTATIONS

$h_1$  et  $h_2$  désignent respectivement les niveaux maximum de  $S_1$  et  $S_2$  (voir figure 1) :

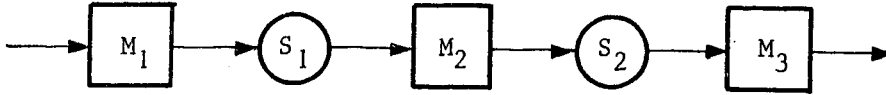


Figure 1

$F_{ijk}(x_1, x_2, t)$ ,  $i, j, k \in \{0, 1\}$ ,  $x_1 \in ]0, h_1[$ ,  $x_2 \in ]0, h_2[$  est la probabilité que les machines  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$  soient respectivement dans les états  $i, j$  et  $k$  ( $0 =$  arrêt et  $1 =$  fonctionnement) et que les niveaux des stocks  $S_1$  et  $S_2$  appartiennent respectivement à  $]0, x_1]$  et  $]0, x_2]$  et ceci à l'instant  $t$ .

$u_{ijk}^{\ell mn}(0, x_2, t)$  est la probabilité que les machines  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  soient respectivement dans les états observés  $i, j$  et  $k$ , que le premier stock soit nul et que le second appartienne à  $]0, x_2]$  ( $0 < x_2 < h_2$ ). Les indices supérieurs indiquent les états réels des machines ( $0 =$  en panne,  $1 =$  état de fonctionner) et la situation est observée à l'instant  $t$ .

Nous définissons de manière analogue :

$$u_{ijk}^{\ell mn}(h_1, x_2, t), u_{ijk}^{\ell mn}(x_1, 0, t), u_{ijk}^{\ell mn}(x_1, h_2, t)$$

Il nous reste à envisager les cas où les deux stocks sont à leur maximum ou à leur minimum.

$w_{ijk}^{\ell mn}(s_1, s_2, t)$  est la probabilité que les machines  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$  soient respectivement dans les états observés  $i, j$  et  $k$ , dans les états réels  $\ell, m$  et  $n$  et que  $S_1$  et  $S_2$  soient respectivement aux niveaux  $s_1$  et  $s_2$  ( $s_1 = 0$  ou  $h_1$  ;  $s_2 = 0$  ou  $h_2$ ), l'ensemble étant observé à l'instant  $t$ .

En régime permanent, nous gardons les notations précédentes en supprimant la variable  $t$ .

Sur tout intervalle  $[t, t+dt]$ ,  $r dt$  désigne la probabilité pour qu'une machine en panne avant l'instant  $t$  soit réparée sur  $[t, t+dt]$  ( $r > 0$ ).

$p dt$  désigne la probabilité pour qu'une machine en fonctionnement, avant l'instant  $t$ , tombe en panne sur  $[t, t+dt]$  ( $p > 0$ ).

## 2. - RECHERCHE DES EQUATIONS REGISSANT LE SYSTEME

### 2.1. - Fonctions de répartition $F_{ijk}$

Il existe huit fonctions de ce type. A chacune d'elles est associée, en régime permanent, une équation aux dérivées partielles. Nous montrons comment s'obtiennent les deux premières et nous fournissons les six autres. Dans la suite, on se souviendra qu'une machine à l'arrêt ne peut tomber en panne.

#### 2.1.1. - Fonction $F_{000}(x_1, x_2)$ , $x_1 \in ]0, h_1[$ , $x_2 \in ]0, h_2[$

En régime non permanent, l'équation de Chapman-Kolmogorov s'écrit :

$$F_{000}(x_1, x_2, t+dt) = [1-3r dt] F_{000}(x_1, x_2, t) + p F_{100}(x_1, x_2, t) dt + p F_{010}(x_1, x_2, t) dt + p F_{001}(x_1, x_2, t) dt$$

d'où :

$$\frac{\partial F_{000}}{\partial t}(x_1, x_2, t) = -3r F_{000}(x_1, x_2, t) + p F_{100}(x_1, x_2, t) + p F_{010}(x_1, x_2, t) + p F_{001}(x_1, x_2, t).$$

Finalement, en régime permanent :

$$0 = -3r F_{000}(x_1, x_2) + p F_{100}(x_1, x_2) + p F_{010}(x_1, x_2) + p F_{001}(x_1, x_2) \quad (1.1)$$

2.1.2. - Fonction  $F_{001}(x_1, x_2)$ ,  $x_1 \in ]0, h_1[$ ,  $x_2 \in ]0, h_2[$

Nous écrivons l'équation de Chapman-Kolmogorov :

$$\begin{aligned} F_{001}(x_1, x_2, t+dt) &= [1-(2r+p)dt]F_{001}(x_1, x_2, t) + r F_{000}(x_1, x_2, t)dt \\ &+ p F_{011}(x_1, x_2, t)dt = p F_{101}(x_1, x_2, t)dt \\ &+ c \frac{\partial F_{001}}{\partial x_2}(x_1, x_2, t)dt - c \frac{\partial F_{001}}{\partial x_2}(x_1, 0^+, t)dt \end{aligned}$$

Elle conduit à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{001}}{\partial t}(x_1, x_2, t) &= -(2r+p)F_{001}(x_1, x_2, t) + rF_{000}(x_1, x_2, t) + pF_{011}(x_1, x_2, t) \\ &+ pF_{101}(x_1, x_2, t) + c \frac{\partial F_{001}}{\partial x_2}(x_1, x_2, t) - c \frac{\partial F_{001}}{\partial x_2}(x_1, 0^+, t) \end{aligned}$$

Si bien que, en régime permanent :

$$\begin{aligned} 0 &= -(2r+p)F_{001}(x_1, x_2) + r F_{000}(x_1, x_2) + p F_{011}(x_1, x_2) + pF_{101}(x_1, x_2) \\ &+ c \frac{\partial F_{001}}{\partial x_2}(x_1, x_2) - c \frac{\partial F_{001}}{\partial x_2}(x_1, 0^+) \end{aligned} \quad (1.2)$$

2.1.3. - Equations issues de  $F_{010}$ ,  $F_{011}$ ,  $F_{100}$ ,  $F_{101}$ ,  $F_{110}$  et  $F_{111}$

Nous les donnons dans l'ordre dans lequel nous venons d'énumérer les fonctions de répartition.

$$\begin{aligned} 0 &= -(2r+p)F_{010}(x_1, x_2) + pF_{011}(x_1, x_2) + rF_{000}(x_1, x_2) + pF_{110}(x_1, x_2) \\ &+ c \left[ \frac{\partial F_{010}}{\partial x_1}(x_1, x_2) - \frac{\partial F_{010}}{\partial x_1}(0^+, x_2) \right] - c \left[ \frac{\partial F_{010}}{\partial x_2}(x_1, x_2) - \frac{\partial F_{010}}{\partial x_2}(x_1, 0^+) \right] \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} 0 &= -(2p+r)F_{011}(x_1, x_2) + rF_{010}(x_1, x_2) + rF_{001}(x_1, x_2) + pF_{111}(x_1, x_2) \\ &+ c \left[ \frac{\partial F_{011}}{\partial x_1}(x_1, x_2) - \frac{\partial F_{011}}{\partial x_1}(0^+, x_2) \right] \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$0 = -(p+2r)F_{100}(x_1, x_2) + pF_{101}(x_1, x_2) + pF_{110}(x_1, x_2) + rF_{000}(x_1, x_2) - c\left[\frac{\partial F_{100}}{\partial x_1}(x_1, x_2) - \frac{\partial F_{100}}{\partial x_1}(0^+, x_2)\right] \quad (1.5)$$

$$0 = -(2p+r)F_{101}(x_1, x_2) + rF_{100}(x_1, x_2) + pF_{111}(x_1, x_2) + rF_{001}(x_1, x_2) - c\left[\frac{\partial F_{101}}{\partial x_1}(x_1, x_2) - \frac{\partial F_{101}}{\partial x_1}(0^+, x_2)\right] + c\left[\frac{\partial F_{101}}{\partial x_2}(x_1, x_2) - \frac{\partial F_{101}}{\partial x_2}(x_1, 0^+)\right] \quad (1.6)$$

$$0 = -(2p+r)F_{110}(x_1, x_2) + pF_{111}(x_1, x_2) + rF_{100}(x_1, x_2) + rF_{010}(x_1, x_2) - c\left[\frac{\partial F_{110}}{\partial x_2}(x_1, x_2) - \frac{\partial F_{110}}{\partial x_2}(x_1, 0^+)\right] \quad (1.7)$$

$$0 = -3pF_{111}(x_1, x_2) + rF_{110}(x_1, x_2) + rF_{101}(x_1, x_2) + rF_{011}(x_1, x_2) \quad (1.8)$$

## 2.2. - Fonctions $u_{ijk}^{\ell mn}(0, x_2)$ , $u_{ijk}^{\ell mn}(h_1, x_2)$ , $u_{ijk}^{\ell mn}(x_1, 0)$ , $u_{ijk}^{\ell mn}(x_1, h_2)$

Il y a, a priori, huit fonctions différentes pour chacun des types de fonction cités ci-dessus. Certaines sont, cependant, nulles car correspondant à des états instables.

### 2.2.1. - Fonctions du type $u_{ijk}^{\ell mn}(0, x_2)$ , $x_2 \in ]0, h_2[$

Dans ce cas, il nous reste à considérer les fonctions suivantes :

$$u_{000}^{000}(0, x_2), u_{001}^{001}(0, x_2), u_{000}^{010}(0, x_2), u_{001}^{011}(0, x_2), u_{110}^{110}(0, x_2), u_{111}^{111}(0, x_2)$$

Les fonctions correspondant aux états réels (101), (100) sont nulles a priori.

Nous donnons les relations associées à chacune des fonctions retenues.

2.2.1.1. - Fonction  $u_{000}^{000}(0, x_2)$ ,  $x_2 \in ]0, h_2[$

L'équation de Chapman-Kolmogorov s'écrit :

$$u_{000}^{000}(0, x_2, t+dt) = [1-3r dt] u_{000}^{000}(0, x_2, t) + p u_{001}^{001}(0, x_2, t) dt$$

D'où :

$$\frac{\partial u_{000}^{000}}{\partial t}(0, x_2, t) = -3r u_{000}^{000}(0, x_2, t) + p u_{001}^{001}(0, x_2, t).$$

Soit, en régime permanent :

$$0 = -3r u_{000}^{000}(0, x_2) + p u_{001}^{001}(0, x_2) \quad (2.1)$$

2.2.1.2. - Fonction  $u_{001}^{001}(0, x_2)$ ,  $x_2 \in ]0, h_2[$

Ici, l'équation de Chapman-Kolmogorov s'écrit :

$$\begin{aligned} u_{001}^{001}(0, x_2, t+dt) &= [1-(2r+p)dt] u_{001}^{001}(0, x_2, t) + r u_{000}^{000}(0, x_2, t) dt \\ &+ c \left[ \frac{\partial u_{001}^{001}}{\partial x_2}(0, x_2, t) - \frac{\partial u_{001}^{001}}{\partial x_2}(0, 0^+, t) \right] dt \end{aligned}$$

D'où, en régime permanent :

$$\begin{aligned} 0 &= -(2r+p) u_{001}^{001}(0, x_2) + r u_{000}^{000}(0, x_2) \\ &= c \left[ \frac{du_{001}^{001}}{dx_2}(0, x_2) - \frac{du_{001}^{001}}{dx_2}(0, 0^+) \right] \quad (2.2) \end{aligned}$$

2.2.1.3. - Fonction  $u_{000}^{010}(0, x_2)$ ,  $x_2 \in ]0, h_2[$

Nous écrivons d'abord l'équation de Chapman-Kolmogorov :

$$\begin{aligned} u_{000}^{010}(0, x_2, t+dt) &= [1-2r dt] u_{000}^{010}(0, x_2, t) + r u_{000}^{000}(0, x_2, t) dt \\ &+ p u_{001}^{011}(0, x_2, t) dt + p u_{110}^{110}(0, x_2, t) dt \\ &+ c \frac{\partial F_{010}}{\partial x_1}(0^+, x_2, t) dt \end{aligned}$$



Soit, en régime permanent :

$$0 = -(r+p)u_{001}^{011}(0,x_2) + ru_{001}^{001}(0,x_2) + ru_{000}^{010}(0,x_2) + pu_{111}^{111}(0,x_2) \\ + c \left[ -\frac{du_{001}^{011}}{dx_2}(0,x_2) - \frac{du_{001}^{011}}{dx_2}(0,0^+) \right] + c \left[ \frac{\partial F_{011}}{\partial x_1}(0^+,x_2) \right] \quad (2.4)$$

2.2.1.5. - Fonction  $u_{110}^{110}(0,x_2)$ ,  $x_2 \in ]0,h_2[$

Ici :

$$u_{110}^{110}(0,x_2,t+dt) = [1-(2p+r)dt]u_{110}^{110}(0,x_2,t) + pu_{111}^{111}(0,x_2,t) \\ + ru_{000}^{010}(0,x_2,t)dt - c \left[ \frac{\partial u_{110}^{110}}{\partial x_2}(0,x_2,t) - \frac{\partial u_{110}^{110}}{\partial x_2}(0,0^+,t) \right] dt$$

Soit, en régime permanent :

$$0 = -(2p+r)u_{110}^{110}(0,x_2) + p u_{111}^{111}(0,x_2) + r u_{000}^{010}(0,x_2) \\ - c \left[ -\frac{du_{110}^{110}}{dx_2}(0,x_2) - \frac{du_{110}^{110}}{dx_2}(0,0^+) \right] \quad (2.5)$$

2.2.1.6. - Fonction  $u_{111}^{111}(0,x_2)$ ,  $x_2 \in ]0,h_2[$

Ici, l'équation de Chapman-Kolmogorov s'écrit :

$$u_{111}^{111}(0,x_2,t+dt) = [1-3pdt]u_{111}^{111}(0,x_2,t) + ru_{110}^{110}(0,x_2,t)dt \\ + ru_{001}^{011}(0,x_2,t)dt$$

Soit, en régime permanent :

$$0 = -3p u_{111}^{111}(0,x_2) + r u_{110}^{110}(0,x_2) + r u_{001}^{011}(0,x_2) \quad (2.6)$$

2.2.2. - Fonctions du type  $u_{ijk}^{lmn}(h_1, x_2)$ ,  $x_2 \in ]0, h_2[$

Les seules fonctions de ce type à considérer sont les suivantes :

$$u_{000}^{000}(h_1, x_2), u_{001}^{001}(h_1, x_2), u_{000}^{100}(h_1, x_2), u_{001}^{101}(h_1, x_2), u_{110}^{110}(h_1, x_2), u_{111}^{111}(h_1, x_2).$$

A chacune de ces fonctions correspond, en régime permanent, une relation obtenue comme en (3.1). Afin de ne pas allonger l'exposé, nous nous contentons de fournir les résultats :

$$0 = -3r u_{000}^{000}(h_1, x_2) + p u_{001}^{001}(h_1, x_2) \quad (3.1)$$

$$0 = -(2r+p)u_{001}^{001}(h_1, x_2) + r u_{000}^{000}(h_1, x_2) + c \left[ \frac{du_{001}^{001}}{dx_2}(h_1, x_2) - \frac{du_{001}^{001}}{dx_2}(h_1, 0^+) \right] \quad (3.2)$$

$$0 = -2r u_{000}^{100}(h_1, x_2) + r u_{000}^{000}(h_1, x_2) + p u_{110}^{110}(h_1, x_2) + p u_{001}^{101}(h_1, x_2) + c \frac{\partial F_{100}}{\partial x_1}(h_1^-, x_2) \quad (3.3)$$

$$0 = -(p+r)u_{001}^{101}(h_1, x_2) + r u_{000}^{100}(h_1, x_2) + p u_{111}^{111}(h_1, x_2) + r u_{001}^{001}(h_1, x_2) + c \left[ \frac{du_{001}^{101}}{dx_2}(h_1, x_2) - \frac{du_{001}^{101}}{dx_2}(h_1, 0^+) \right] + c \frac{\partial F_{101}}{\partial x_1}(h_1^-, x_2) \quad (3.4)$$

$$0 = -(2p+r)u_{110}^{110}(h_1, x_2) + p u_{111}^{111}(h_1, x_2) + r u_{000}^{100}(h_1, x_2) - c \left[ \frac{du_{110}^{110}}{dx_2}(h_1, x_2) - \frac{du_{110}^{110}}{dx_2}(h_1, 0^+) \right] \quad (3.5)$$

$$0 = -3p u_{111}^{111}(h_1, x_2) + r u_{001}^{101}(h_1, x_2) + r u_{110}^{110}(h_1, x_2) \quad (3.6)$$

2.2.3. - Fonctions du type  $u_{ijk}^{lmn}(x_1, 0)$ ,  $x_1 \in ]0, h_1[$

Les seules fonctions de répartition non identiquement nulles sont ici :

$$u_{000}^{000}(x_1, 0), u_{000}^{001}(x_1, 0), u_{011}^{011}(x_1, 0), u_{100}^{100}(x_1, 0), u_{100}^{101}(x_1, 0), u_{111}^{111}(x_1, 0)$$

En effet, les états réels (0,1,0) et (1,1,0) sont instables lorsque le second stock est à son minimum.

A chacun des six fonctions de répartition retenues, nous associons une relation obtenue comme en 3.1.

$$0 = -3r u_{000}^{000}(x_1, 0) + p u_{100}^{100}(x_1, 0) \quad (4.1)$$

$$0 = -2r u_{000}^{001}(x_1, 0) + r u_{000}^{000}(x_1, 0) + p u_{011}^{011}(x_1, 0) + p u_{100}^{101}(x_1, 0) + c \frac{\partial F_{001}}{\partial x_2}(x_1, 0^+) \quad (4.2)$$

$$0 = -(r+2p) u_{011}^{011}(x_1, 0) + r u_{000}^{001}(x_1, 0) + p u_{111}^{111}(x_1, 0) + c \left[ \frac{du_{011}^{011}}{dx_1}(x_1, 0) - \frac{du_{011}^{011}}{dx_1}(0^+, 0) \right] \quad (4.3)$$

$$0 = -(p+2r) u_{100}^{100}(x_1, 0) + r u_{000}^{000}(x_1, 0) - c \left[ \frac{du_{100}^{100}}{dx_1}(x_1, 0) - \frac{du_{100}^{100}}{dx_1}(0^+, 0) \right] \quad (4.4)$$

$$0 = -(p+r) u_{100}^{101}(x_1, 0) + r u_{100}^{100}(x_1, 0) + p u_{111}^{111}(x_1, 0) + r u_{000}^{001}(x_1, 0) - c \left[ \frac{du_{100}^{101}}{dx_1}(x_1, 0) - \frac{du_{100}^{101}}{dx_1}(0^+, 0) \right] + c \frac{\partial F_{101}}{\partial x_2}(x_1, 0^+) \quad (4.5)$$

$$0 = -3p u_{111}^{111}(x_1, 0) + r u_{100}^{101}(x_1, 0) + r u_{011}^{011}(x_1, 0) \quad (4.6)$$

2.2.4. - Fonctions du type  $u_{ijk}^{lmn}(x_1, h_2)$

Les états (0,0,1) et (1,0,1) sont instables lorsque le second stock est à son maximum. Les seules fonctions à prendre en considération sont donc :

$$u_{000}^{000}(x_1, h_2), u_{000}^{010}(x_1, h_2), u_{011}^{011}(x_1, h_2), u_{100}^{100}(x_1, h_2), u_{100}^{110}(x_1, h_2), u_{111}^{111}(x_1, h_2)$$

Partant de chacune de ces six fonctions de répartition en régime non stationnaire, puis en passant en régime stationnaire comme en 3.1, nous obtenons les relations suivantes :

$$0 = -3r u_{000}^{000}(x_1, h_2) + p u_{100}^{100}(x_1, h_2) \quad (5.1)$$

$$0 = -2r u_{000}^{010}(x_1, h_2) + p u_{011}^{011}(x_1, h_2) + r u_{000}^{000}(x_1, h_2) + p u_{100}^{110}(x_1, h_2) + c \frac{\partial F_{010}}{\partial x_2}(x_1, h_2^-) \quad (5.2)$$

$$0 = -(2p+r) u_{011}^{011}(x_1, h_2) + r u_{000}^{010}(x_1, h_2) + p u_{111}^{111}(x_1, h_2) + c \left[ \frac{du_{011}^{011}}{dx_1}(x_1, h_2) - \frac{du_{011}^{011}}{dx_1}(0^+, h_2) \right] \quad (5.3)$$

$$0 = -(2r+p) u_{100}^{100}(x_1, h_2) + r u_{000}^{000}(x_1, h_2) - c \left[ \frac{du_{100}^{100}}{dx_1}(x_1, h_2) - \frac{du_{100}^{100}}{dx_1}(0^+, h_2) \right] \quad (5.4)$$

$$0 = -(r+p) u_{100}^{110}(x_1, h_2) + r u_{000}^{010}(x_1, h_2) + r u_{100}^{100}(x_1, h_2) + p u_{111}^{111}(x_1, h_2) - c \left[ \frac{du_{100}^{110}}{dx_1}(x_1, h_2) - \frac{du_{100}^{110}}{dx_1}(0^+, h_2) \right] + c \frac{\partial F_{110}}{\partial x_2}(x_1, h_2^-) \quad (5.5)$$

$$0 = -3p u_{111}^{111}(x_1, h_2) + r u_{011}^{011}(x_1, h_2) + r u_{100}^{110}(x_1, h_2) \quad (5.6)$$

### 2.3. - Probabilités aux bornes

#### 2.3.1. - Probabilités du type $w_{ijk}^{lmn}(0,0)$

Nous observons que, lorsque les niveaux des deux stocks sont nuls, les états  $(1,0,0)$ ,  $(1,0,1)$  et  $(1,1,0)$  sont instables.

Il nous reste donc à considérer les probabilités  $w_{000}^{000}(0,0)$ ,  $w_{000}^{001}(0,0)$ ,  $w_{000}^{010}(0,0)$ ,  $w_{000}^{011}(0,0)$  et  $w_{111}^{111}(0,0)$ .

Considérons  $w_{000}^{000}(0,0,t)$ . Alors :

$$w_{000}^{000}(0,0,t+dt) = [1-3rdt]w_{000}^{000}(0,0,t)$$

soit :

$$\frac{dw_{000}^{000}(0,0,t)}{dt} = -3r w_{000}^{000}(0,0,t)$$

et, en régime permanent :

$$w_{000}^{000}(0,0) = 0 \quad (6.1)$$

De même, en considérant  $w_{000}^{001}(0,0,t)$  :

$$\begin{aligned} w_{000}^{001}(0,0,t+dt) &= [1-2rdt]w_{000}^{001}(0,0,t) + r w_{000}^{000}(0,0,t)dt \\ &\quad + c \frac{dw_{000}^{001}}{dx_2}(0,0^+,t)dt \end{aligned}$$

soit, en tenant compte de (6.1) :

$$\frac{dw_{000}^{001}}{dt}(0,0,t) = -2r w_{000}^{001}(0,0,t) + c \frac{dw_{000}^{001}}{dx_2}(0,0^+,t)$$

D'où, en régime permanent :

$$0 = -2r w_{000}^{001}(0,0) + c \frac{dw_{000}^{001}}{dx_2}(0,0^+) \quad (6.2)$$

Considérons maintenant  $w_{000}^{010}(0,0,t)$  :

$$w_{000}^{010}(0,0,t+dt) = [1-2r dt] w_{000}^{010}(0,0,t)$$

D'où, en régime permanent :

$$w_{000}^{010}(0,0) = 0 \quad (6.3)$$

Ecrivons l'équation correspondant à  $w_{000}^{011}(0,0,t)$  :

$$\begin{aligned} w_{000}^{011}(0,0,t+dt) &= [1-r dt] w_{000}^{011}(0,0,t) + r w_{000}^{001}(0,0,t) dt \\ &+ r w_{000}^{010}(0,0,t) dt + p w_{111}^{111}(0,0,t) dt \\ &+ c \frac{du_{011}^{011}}{dx_1}(0^+,0,t) dt \end{aligned}$$

soit, en tenant compte de (6.3) :

$$\begin{aligned} \frac{dw_{000}^{011}}{dt}(0,0,t) &= -r w_{000}^{011}(0,0,t) + r w_{000}^{001}(0,0,t) + p w_{111}^{111}(0,0,t) \\ &+ c \frac{du_{011}^{011}}{dx_1}(0^+,0,t) \end{aligned}$$

et, en régime permanent :

$$0 = -r w_{000}^{011}(0,0) + r w_{000}^{001}(0,0) + p w_{111}^{111}(0,0) + c \frac{du_{011}^{011}}{dx_1}(0^+,0) \quad (6.4)$$

Enfin, en partant de  $w_{111}^{111}(0,0,t)$  :

$$w_{111}^{111}(0,0,t+dt) = [1-3p dt] w_{111}^{111}(0,0,t) + r w_{000}^{011}(0,0,t) dt$$

soit :

$$\frac{dw_{111}^{111}}{dt}(0,0,t) = -3p w_{111}^{111}(0,0,t) + r w_{000}^{011}(0,0,t)$$

et, en régime permanent :

$$0 = -3p w_{111}^{111}(0,0) + r w_{000}^{011}(0,0) \quad (6.5)$$

2.3.2. - Probabilités du type  $w_{ijk}^{\ell mn}(h_1, 0)$

Nous ne considérons pas les probabilités associées aux états instables  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 1)$  et  $(1, 1, 0)$ .

Les autres probabilités se calculent alors comme ci-dessus.

Il vient :

$$w_{000}^{000}(h_1, 0) = 0 \quad (7.1)$$

$$-2r w_{000}^{001}(h_1, 0) + c \frac{du_{001}^{001}}{dx_2}(h_1, 0^+) = 0 \quad (7.2)$$

$$-2r w_{000}^{100}(h_1, 0) + c \frac{du_{100}^{100}}{dx_1}(h_1, 0^-) = 0 \quad (7.3)$$

$$-r w_{000}^{101}(h_1, 0) + p w_{111}^{111}(h_1, 0) + c \frac{du_{100}^{101}}{dx_1}(h_1, 0^-) + c \frac{du_{001}^{101}}{dx_2}(h_1, 0^+) = 0 \quad (7.4)$$

$$-3p w_{111}^{111}(h_1, 0) + r w_{000}^{101}(h_1, 0) = 0 \quad (7.5)$$

2.3.3. - Probabilités du type  $w_{ijk}^{\ell mn}(0, h_2)$

Dans ce cas, les états réels  $(0, 0, 1)$ ,  $(1, 0, 0)$  et  $(1, 0, 1)$  sont instables. Il en est de même des états réels  $(0, 1, 1)$  et  $(1, 1, 0)$  qui conduisent respectivement aux états observés  $(0, 0, 1)$  et  $(1, 0, 0)$ , lesquels font partie de la liste ci-dessus.

Il nous reste donc à considérer les états réels  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  et  $(1, 1, 1)$ . On trouve alors qu'en régime permanent :

$$w_{000}^{010}(0, h_2) = 0 \quad (8.1)$$

$$w_{000}^{000}(0, h_2) = 0 \quad (8.2)$$

$$w_{111}^{111}(0, h_2) = 0 \quad (8.3)$$

### 2.3.4. - Probabilités du type $w_{ijk}^{\ell mn}(h_1, h_2)$

Les états réels (0,0,1), (0,1,1) et (1,0,1) sont instables dans ce cas. Les autres états nous conduisent aux résultats suivants :

$$w_{000}^{000}(h_1, h_2) = 0 \quad (9.1)$$

En tenant compte de (9.1) :

$$w_{000}^{010}(h_1, h_2) = 0 \quad (9.2)$$

Toujours en tenant compte de (9.1) :

$$-2r w_{000}^{100}(h_1, h_2) + c \frac{du_{100}^{100}}{dx_1}(h_1, h_2) = 0 \quad (9.3)$$

$$\begin{aligned} -r w_{000}^{110}(h_1, h_2) + p w_{111}^{111}(h_1, h_2) + r w_{000}^{100}(h_1, h_2) \\ + c \frac{du_{110}^{110}}{dx_2}(h_1, h_2) = 0 \end{aligned} \quad (9.4)$$

$$-3p w_{111}^{111}(h_1, h_2) + r w_{000}^{110}(h_1, h_2) = 0 \quad (9.5)$$

## 3. - RESOLUTION DES SYSTEMES DIFFERENTIELS ET AUX DERIVEES PARTIELLES

### 3.1. - Fonctions $F_{ijk}$

Elles sont régies par le système formé des équations (1.1) à (1.8).

Les trois machines sont identiques. En tenant compte des résultats de la première partie, nous voyons que les fonctions cherchées sont nulles dès que l'une au moins des variables est nulle, elles seront de la forme  $K x_1 x_2$ .

Toutes les dérivées partielles du système s'annulent et nous obtenons un système linéaire dont la solution s'écrit :



$$F_{000}(x_1, x_2) = K x_1 x_2 \quad (10.1)$$

$$F_{100}(x_1, x_2) = F_{010}(x_1, x_2) = F_{001}(x_1, x_2) = \frac{r}{p} K x_1 x_2 \quad (10.2)$$

$$F_{011}(x_1, x_2) = F_{101}(x_1, x_2) = F_{110}(x_1, x_2) = \frac{r^2}{p} K x_1 x_2 \quad (10.3)$$

$$F_{111}(x_1, x_2) = \left(\frac{r}{p}\right)^3 K x_1 x_2 \quad (10.4)$$

où  $K \in \mathbb{R}^+$ ,  $(x_1, x_2) \in ]0, h_1[ \times ]0, h_2[$

3.2. - Fonctions  $u_{ijk}^{lmn}(0, x_2), u_{ijk}^{lmn}(h_1, x_2), u_{ijk}^{lmn}(x_1, 0), u_{ijk}^{lmn}(x_1, h_2)$

3.2.1. - Fonctions  $u_{ijk}^{lmn}(0, x_2), x_2 \in ]0, h_2[$

Elles sont obtenues en résolvant le système, constitué par les relations (2.1) à (2.6) qui, compte tenu de (10.1) à (10.5), se réécrit :

$$0 = -3r u_{000}^{000}(0, x_2) + p u_{001}^{001}(0, x_2) \quad (11.1)$$

$$c \frac{du_{001}^{001}}{dx_2}(0, x_2) = -r u_{000}^{000}(0, x_2) + (2r+p) u_{001}^{001}(0, x_2) - c \frac{du_{001}^{001}}{dx_2}(0, 0^+) \quad (11.2)$$

$$0 = r u_{000}^{000}(0, x_2) - 2r u_{010}^{010}(0, x_2) + p u_{001}^{011}(0, x_2) + p u_{110}^{110}(0, x_2) + c \frac{r}{p} K x_2 \quad (11.3)$$

$$c \frac{du_{001}^{011}}{dx_2}(0, x_2) = -r u_{001}^{001}(0, x_2) - r u_{010}^{010}(0, x_2) + (r+p) u_{001}^{011}(0, x_2)$$

$$-p u_{111}^{111}(0, x_2) + c \frac{du_{001}^{011}}{dx_2}(0, 0^+) - c \frac{r^2}{p} K x_2 \quad (11.4)$$

$$c \frac{du_{110}^{110}}{dx_2}(0, x_2) = r u_{010}^{010}(0, x_2) - (2p+r) u_{110}^{110}(0, x_2) + p u_{111}^{111}(0, x_2) + c \frac{du_{110}^{110}}{dx_2}(0, 0^+) \quad (11.5)$$

$$0 = r u_{001}^{011}(0, x_2) + r u_{110}^{110}(0, x_2) - 3p u_{111}^{111}(0, x_2) \quad (11.6)$$

Désignons par :

- ① état réel (0,0,0) et état observé (0,0,0)
- ② état réel (0,0,1) et état observé (0,0,1)
- ③ état réel (0,1,0) et état observé (0,0,0)
- ④ état réel (0,1,1) et état observé (0,0,1)
- ⑤ état réel (1,1,0) et état observé (1,1,0)
- ⑥ état réel (1,1,1) et état observé (1,1,1),

sachant en outre que le premier stock est au niveau 0 et que le niveau  $x_2$  du second appartient à  $]0, h_2[$ .

La figure suivante indique les changements d'état possibles en régime permanent, compte tenu de l'état observé. Les flèches notées W indiquent la possibilité d'aboutir à l'un de ces états en partant d'une situation dans laquelle le niveau du premier stock n'est pas nul.

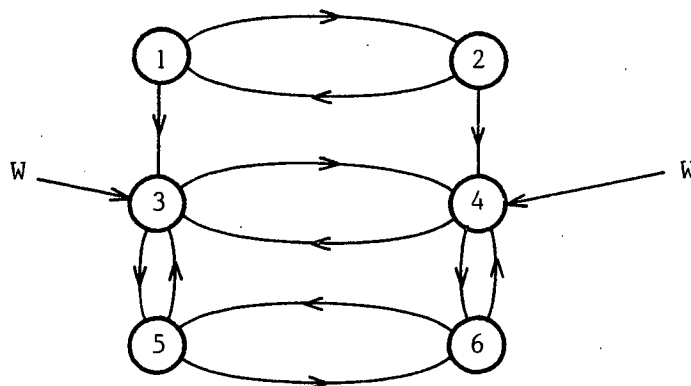


Figure 2

Nous voyons qu'en régime permanent, les fonctions de répartition correspondant aux états ① et ② sont nulles.

Le système (11.1) à (11.6) se réduit donc à :

$$\begin{aligned}
 0 &= -2r u_{000}^{010}(0, x_2) + p u_{001}^{011}(0, x_2) \\
 &\quad + p u_{110}^{110}(0, x_2) + c \frac{r}{p} K x_2 \quad (12.1)
 \end{aligned}$$

$$c \frac{du_{001}^{011}}{dx_2}(0, x_2) = -r u_{000}^{010}(0, x_2) + (r+p) u_{001}^{011}(0, x_2) - p u_{111}^{111}(0, x_2) + c \frac{du_{001}^{011}}{dx_2}(0, 0^+) - c \frac{r^2}{p^2} K x_2 \quad (12.2)$$

$$c \frac{du_{110}^{110}}{dx_2}(0, x_2) = r u_{000}^{010}(0, x_2) - (2p+r) u_{110}^{110}(0, x_2) + p u_{111}^{111}(0, x_2) + c \frac{du_{110}^{110}}{dx_2}(0, 0^+) \quad (12.3)$$

$$0 = r u_{001}^{011}(0, x_2) + r u_{110}^{110}(0, x_2) - 3p u_{111}^{111}(0, x_2) \quad (12.4)$$

En tenant compte de (12.4) :

$$0 = -2r u_{000}^{010}(0, x_2) + p u_{001}^{011}(0, x_2) + p u_{110}^{110}(0, x_2) + c \frac{r}{p} K x_2 \quad (13.1)$$

$$c \frac{du_{001}^{011}}{dx_2}(0, x_2) = -r u_{000}^{010}(0, x_2) + (\frac{2}{3}r+p) u_{001}^{011}(0, x_2) - \frac{1}{3}r u_{110}^{110}(0, x_2) + c \frac{du_{001}^{011}}{dx_2}(0, 0^+) - c \frac{r^2}{p^2} K x_2 \quad (13.2)$$

$$c \frac{du_{110}^{110}}{dx_2}(0, x_2) = r u_{000}^{010}(0, x_2) - 2(p+\frac{1}{3}r) u_{110}^{110}(0, x_2) + \frac{1}{3} r u_{001}^{011}(0, x_2) + c \frac{du_{110}^{110}}{dx_2}(0, 0^+) \quad (13.3)$$

et, en tenant compte de (13.1) :

$$c \frac{du_{001}^{011}}{dx_2}(0, x_2) = (\frac{2}{3} r + \frac{1}{2}p) u_{001}^{011}(0, x_2) - (\frac{1}{3}r + \frac{p}{2}) u_{110}^{110}(0, x_2) - c \frac{r}{p} K (\frac{p+2r}{2p}) x_2 + c \frac{du_{001}^{011}}{dx_2}(0, 0^+) \quad (14.1)$$

$$c \frac{du_{110}^{110}}{dx_2}(0, x_2) = (\frac{p}{2} + \frac{r}{3}) u_{001}^{011}(0, x_2) - (\frac{3}{2}p + \frac{2}{3}r) u_{110}^{110}(0, x_2) + c \frac{r}{2p} K x_2 + c \frac{du_{110}^{110}}{dx_2}(0, 0^+) \quad (14.2)$$

Ce système se résout de manière classique et nous obtenons :

$$u_{001}^{011}(0, x_2) = K c \frac{r}{p} \left\{ 2x_2 + \frac{[1 - \exp(\lambda_2 h_2)][\exp(\lambda_1 x_2) - 1]}{\lambda_1 [\sqrt{3} - 1][\exp(\lambda_2 h_2) - \exp(\lambda_1 h_2)]} + \frac{[1 - \exp(\lambda_1 h_2)][\exp(\lambda_2 x_2) - 1]}{\lambda_2 [1 + \sqrt{3}][\exp(\lambda_2 h_2) - \exp(\lambda_1 h_2)]} \right\} \quad (15.1)$$

$$u_{110}^{110}(0, x_2) = K c \frac{r}{p} \left\{ x_2 + \frac{[1 - \exp(\lambda_2 h_2)][\exp(\lambda_1 x_2) - 1]}{\lambda_1 [\sqrt{3} + 1][\exp(\lambda_2 h_2) - \exp(\lambda_1 h_2)]} + \frac{[1 - \exp(\lambda_1 h_2)][\exp(\lambda_2 x_2) - 1]}{\lambda_2 [\sqrt{3} - 1][\exp(\lambda_2 h_2) - \exp(\lambda_1 h_2)]} \right\} \quad (15.2)$$

et en considérant (13.1), puis (12.4) :

$$u_{000}^{010}(0, x_2) = K \frac{c}{2p} \left\{ 4x_2 + \frac{\sqrt{3}[1 - \exp(\lambda_2 h_2)][\exp(\lambda_1 x_2) - 1]}{\lambda_1 [\exp(\lambda_2 h_2) - \exp(\lambda_1 h_2)]} + \frac{\sqrt{3}[1 - \exp(\lambda_1 h_2)][\exp(\lambda_2 x_2) - 1]}{\lambda_2 [\exp(\lambda_2 h_2) - \exp(\lambda_1 h_2)]} \right\} \quad (15.3)$$

$$u_{111}^{111}(0, x_2) = K c \frac{r}{p} \left\{ x_2 + \frac{\sqrt{3}[1 - \exp(\lambda_2 h_2)][\exp(\lambda_1 x_2) - 1]}{3\lambda_1 [\exp(\lambda_2 h_2) - \exp(\lambda_1 h_2)]} + \frac{\sqrt{3}[1 - \exp(\lambda_1 h_2)][\exp(\lambda_2 x_2) - 1]}{3\lambda_2 [\exp(\lambda_2 h_2) - \exp(\lambda_1 h_2)]} \right\} \quad (15.4)$$

avec :

$$\lambda_1 = \frac{2r + 3p - p\sqrt{3}}{2c\sqrt{3}} \quad \lambda_2 = \frac{2r + 3p + p\sqrt{3}}{2c\sqrt{3}} \quad (15.5)$$

Toutes les autres fonctions de répartition du même type sont nulles.

### 3.2.2. - Fonctions $u_{ijk}^{lmn}(h_1, x_2)$ , $x_2 \in ]0, h_2[$

Elles sont obtenues en résolvant le système (3.1) à (3.6). Lorsque le stock  $S_1$  est à son niveau maximum  $h_1$  et que le niveau de  $S_2$  appartient à  $]0, h_2[$ , notons :

- ① état réel (0,0,0) et état observé (0,0,0)
- ② état réel (0,0,1) et état observé (0,0,1)
- ③ état réel (1,0,0) et état observé (0,0,0)
- ④ état réel (1,0,1) et état observé (0,0,1)
- ⑤ état réel (1,1,0) et état observé (1,1,0)
- ⑥ état réel (1,1,1) et état observé (1,1,1)

Nous pouvons représenter les changements d'état possibles en régime permanent (compte tenu de l'état observé). Nous obtenons encore la figure 2 dans laquelle W représente, cette fois, la possibilité d'aboutir à l'un de ces états en partant d'une situation dans laquelle le niveau  $S_1$  est différent de  $h_1$ .

Nous voyons sur cette figure que les fonctions de répartition correspondant aux états ① et ② (i.e.  $u_{000}^{000}(h_1, x_2)$  et  $u_{001}^{001}(h_1, x_2)$ ) sont identiquement nulles.

En tenant compte de cette remarque, nous aboutissons à un système identique au système (12.1) à (12.4) dans lequel :

$u_{000}^{010}$  est remplacé par  $u_{000}^{100}$

$u_{001}^{011}$  est remplacé par  $u_{001}^{101}$

$u_{110}^{110}$  est remplacé par  $u_{110}^{110}$

$u_{111}^{111}$  est remplacé par  $u_{111}^{111}$

La solution cherchée s'écrit donc :

$$u_{000}^{100}(h_1, x_2) = u_{000}^{010}(0, x_2) \quad (16.1)$$

$$u_{001}^{101}(h_1, x_2) = u_{001}^{011}(0, x_2) \quad (16.2)$$

$$u_{110}^{110}(h_1, x_2) = u_{110}^{110}(0, x_2) \quad (16.3)$$

$$u_{111}^{111}(h_1, x_2) = u_{111}^{111}(0, x_2) \quad (16.4)$$

où les seconds membres sont donnés par (15.1) à (15.4).

Toutes les autres fonctions de répartition du même type sont nulles.

3.2.3. - Fonctions  $u_{ijk}^{lmn}(x_1, 0)$ ,  $x_1 \in ]0, h_1[$

Elles sont solution du système formé par les relations (4.1) à (4.6). Nous nous contentons de donner les résultats afin de ne pas allonger l'exposé. Le processus à suivre est le même que précédemment. Nous obtenons :

$$u_{011}^{011}(x_1, 0) = Kc \frac{r}{p^2} \left\{ x_1 - \frac{[\sqrt{3}+1][1-\exp(-\lambda_1 h_1)][\exp(-\lambda_2 x_1)-1]}{2\lambda_2 [\exp(-\lambda_2 h_1)-\exp(-\lambda_1 h_1)]} - \frac{[\sqrt{3}-1][\exp(-\lambda_2 h_1)-1][1-\exp(-\lambda_1 x_1)]}{2\lambda_1 [\exp(-\lambda_2 h_1)-\exp(-\lambda_1 h_1)]} \right\} \quad (17.1)$$

$$u_{100}^{101}(x_1, 0) = Kc \frac{r}{p^2} \left\{ 2x_1 - \frac{[\sqrt{3}-1][1-\exp(-\lambda_1 h_1)][\exp(-\lambda_2 x_1)-1]}{2\lambda_2 [\exp(-\lambda_2 h_1)-\exp(-\lambda_1 h_1)]} - \frac{[\sqrt{3}+1][\exp(-\lambda_2 h_1)-1][1-\exp(-\lambda_1 x_1)]}{2\lambda_1 [\exp(-\lambda_2 h_1)-\exp(-\lambda_1 h_1)]} \right\} \quad (17.2)$$

$$u_{000}^{001}(x_1, 0) = K \frac{c}{p} \left\{ 2x_1 - \frac{\sqrt{3}[1-\exp(-\lambda_1 h_1)][\exp(-\lambda_2 x_1)-1]}{2\lambda_2 [\exp(-\lambda_2 h_1)-\exp(-\lambda_1 h_1)]} - \frac{\sqrt{3}[\exp(-\lambda_2 h_1)-1][1-\exp(-\lambda_1 x_1)]}{2\lambda_1 [\exp(-\lambda_2 h_1)-\exp(-\lambda_1 h_1)]} \right\} \quad (17.3)$$

$$u_{111}^{111}(x_1, 0) = Kc \frac{r^2}{p^3} \left\{ x_1 - \frac{\sqrt{3}[1-\exp(-\lambda_1 h_1)][\exp(-\lambda_2 x_1)-1]}{3\lambda_2 [\exp(-\lambda_2 h_1)-\exp(-\lambda_1 h_1)]} - \frac{\sqrt{3}[\exp(-\lambda_2 h_1)-1][1-\exp(-\lambda_1 x_1)]}{3\lambda_1 [\exp(-\lambda_2 h_1)-\exp(-\lambda_1 h_1)]} \right\} \quad (17.4)$$

Rappelons que  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont donnés par (15.5).

Toutes les autres fonctions de répartition du même type sont nulles.

3.2.4. - Fonctions  $u_{ijk}^{\ell mn}(x_1, h_2)$ ,  $x_1 \in ]0, h_1[$

Elles sont solution du système formé par les relations (5.1) à (5.6). Nous ne développons pas les calculs qui conduisent aux résultats. Nous obtenons :

$$u_{000}^{010}(x_1, h_2) = u_{000}^{001}(x_1, 0) \quad (18.1)$$

$$u_{011}^{011}(x_1, h_2) = u_{011}^{011}(x_1, 0) \quad (18.2)$$

$$u_{100}^{110}(x_1, h_2) = u_{100}^{101}(x_1, 0) \quad (18.3)$$

$$u_{111}^{111}(x_1, h_2) = u_{111}^{111}(x_1, 0) \quad (18.4)$$

Dans ces relations, le second membre est donné par (17.1) à (17.4).

Les fonctions de répartition non citées ici sont identiquement nulles.

3.3. - Probabilités aux bornes

3.3.1. - Probabilités du type  $w_{ijk}^{\ell mn}(0,0)$

Elles sont solution du système formé des relations (6.1) à (6.5) dans lesquelles on tient compte des résultats précédents.

Nous obtenons aisément :

$$w_{000}^{011}(0,0) = Kc^2 \frac{3}{4p^2} \left\{ 2 + \frac{[\sqrt{3}+1][1-\exp(-\lambda_1 h_1)]}{\exp(-\lambda_2 h_1) - \exp(-\lambda_1 h_1)} - \frac{[\sqrt{3}-1][\exp(-\lambda_2 h_1) - 1]}{\exp(-\lambda_2 h_1) - \exp(-\lambda_1 h_1)} \right\} \quad (19.1)$$

$$w_{111}^{111}(0,0) = \frac{r}{3p} w_{000}^{011}(0,0) \quad (19.2)$$

Les probabilités du type  $w_{ijk}^{\ell mn}(0,0)$  non citées ici sont nulles.

### 3.3.2. - Probabilités du type $w_{ijk}^{\ell mn}(h_1, 0)$

Partant des résultats précédents, les relations (7.1) à (7.5) conduisent à :

$$w_{111}^{111}(h_1, 0) = K c^2 \frac{r}{4p} \left\{ 8 + [\sqrt{3}-1] \left[ \frac{1-\exp(\lambda_1 h_1)}{\exp(\lambda_2 h_1) - \exp(\lambda_1 h_1)} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1-\exp(\lambda_1 h_2)}{\exp(\lambda_2 h_2) - \exp(\lambda_1 h_2)} \right] + [\sqrt{3}+1] \left[ \frac{1-\exp(\lambda_2 h_1)}{\exp(\lambda_2 h_1) - \exp(\lambda_1 h_1)} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1-\exp(\lambda_2 h_2)}{\exp(\lambda_2 h_2) - \exp(\lambda_1 h_2)} \right] \right\} \quad (20.1)$$

$$w_{000}^{101}(h_1, 0) = 3 \frac{p}{r} w_{111}^{111}(h_1, 0) \quad (20.2)$$

Les probabilités du type  $w_{ijk}^{\ell mn}(h_1, 0)$  non citées ici sont nulles.

### 3.3.3. - Probabilités du type $w_{ijk}^{\ell mn}(0, h_2)$

Nous savons (voir paragraphe 2.3.3.) qu'elles sont toutes nulles.

### 3.3.4. - Probabilités du type $w_{ijk}^{\ell mn}(h_1, h_2)$

Partant des relations (9.3) à (9.5) et des résultats de (3.2), nous obtenons :

$$w_{111}^{111}(h_1, h_2) = K c^2 \frac{r}{4p} \left\{ 2 + \frac{[\sqrt{3}-1][1-\exp(\lambda_2 h_2)]\exp(\lambda_1 h_2)}{\exp(\lambda_2 h_2) - \exp(\lambda_1 h_2)} \right. \\ \left. + \frac{[\sqrt{3}+1][1-\exp(\lambda_1 h_2)]\exp(\lambda_2 h_2)}{\exp(\lambda_2 h_2) - \exp(\lambda_1 h_2)} \right\} \quad (21.1)$$

et :

$$w_{000}^{110}(h_1, h_2) = \frac{3p}{r} w_{111}^{111}(h_1, h_2) \quad (21.2)$$

Les probabilités du même type non citées ici sont nulles.



#### 4. - DETERMINATION DE LA CONSTANCE K

Elle s'obtient en écrivant que la somme de toutes les probabilités qui interviennent est égale à 1.

Compte-tenu des résultats précédents, nous écrivons :

$$\begin{aligned}
 & F_{000}(h_1, h_2) + 3F_{100}(h_1, h_2) + 3F_{011}(h_1, h_2) + F_{111}(h_1, h_2) \\
 & + 2[u_{001}^{011}(0, h_2) + u_{110}^{110}(0, h_2) + u_{000}^{010}(0, h_2) \\
 & + u_{111}^{111}(0, h_2) + u_{011}^{011}(h_1, 0) + u_{100}^{101}(h_1, 0) \\
 & + u_{000}^{001}(h_1, 0) + u_{111}^{111}(h_1, 0)] + \frac{3p+r}{r} [w_{111}^{111}(0, 0) \\
 & + w_{111}^{111}(h_1, 0) + w_{111}^{111}(h_1, h_2)] = 1
 \end{aligned} \tag{22}$$

K étant déterminé, le comportant du système est entièrement défini.

#### 5. - TAUX DE PRODUCTION

La constante K étant définie par (22), le taux de production, fonction de  $h_1$  et  $h_2$ , s'écrit :

$$\begin{aligned}
 Z(h_1, h_2) = & \{3F_{011}(h_1, h_2) + F_{111}(h_1, h_2) + 2[u_{001}^{011}(0, h_2) \\
 & + u_{111}^{111}(0, h_2) + u_{011}^{011}(h_1, 0) + u_{111}^{111}(h_1, 0)] \\
 & + w_{111}^{111}(0, 0) + w_{111}^{111}(h_1, 0) + w_{111}^{111}(h_1, h_2)\}c
 \end{aligned} \tag{23}$$

#### 6. - UN EXEMPLE

Les abaques que nous présentons maintenant ont été obtenues par calcul automatique pour :

$$r = 4 \quad p = 1 \quad c = 2$$

Nous représentons la valeur du taux de production en fonction de  $h_1$  pour quatre valeurs différentes de  $h_2$ .

Lorsque  $h_1$  et  $h_2$  deviennent grands, le taux de production du système tend vers celui de l'une des machines qui est ici de 1.6.

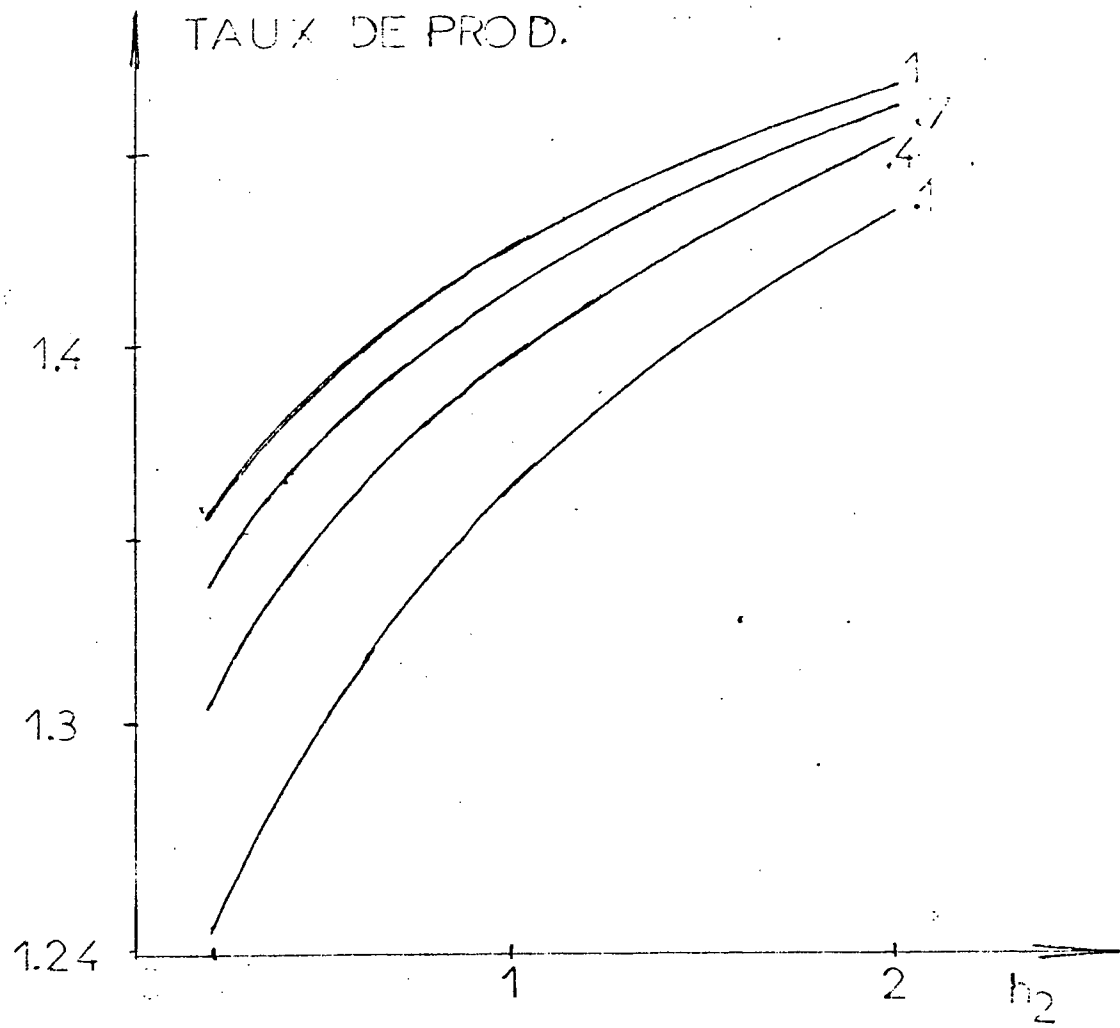


FIG. 2

FIGURE 3

## 7. - LE LOGICIEL

### 7.1. Le programme principal.

```
1      open(0)
2      open(1,form="formatted")
3      write(0,1)
4 1    format(2x,"donnez n,r et c")
5      read(0,2)n,r,c
6 2    format(f8.2)
7      write(1,3)n,r,c
8 3    format(2x,"p=",.1x,f9.2,2x,"r=",.1x,f9.2,2x,"c=",.1x,f9.2)
9      write(0,4)
10 4    format(2x,"donnez mini,maxi et pas de h1")
11      read(0,5)h11,h12,d1
12 5    format(f7.4)
13      write(0,6)
14 6    format(2x,"donnez mini,maxi et pas de h2")
15      read(0,5)h21,h22,d2
16      s=r/(n+r)*c
17      write(1,7)s
18 7    format(2x,"taux de production de la machine",2x,e14.7)
19      do 10 h1=h11,h12,d1
20      write(1,8)
21 8    format(2x,50("**"))
22      do 10 h2=h21,h22,d2
23      call trima(n,r,c,h1,h2,s)
24      write(1,11)h1,h2,s
25 11   format(2x,"h1=",.f8.3,2x,"h2=",.f8.3,2x,"t.n.=",.f8.3)
26 10   continue
27      close(1)
28      stop
29      end
```

## 7.2. Le sous-programme trima.

```

1      subroutine trima(n,r,c,h1,h2,s)
2      r000=h1*h2
3      r111=r*r*r/n/n/n*r000
4      r100=r/n*r000
5      r011=r*r/n/n*r000
6      r3=3.**0.5
7      x1=(2.*r+r3.*n-n*r3)/2./c/r3
8      x2=(-2.*r-r3.*n-n*r3)/2./c/r3
9      x2h1=x2*h1
10     if(x2h1.gt.82.)x2h1=82.
11     if(x2h1.lt.-82.)x2h1=-82.
12     x2h2=x2*h2
13     if(x2h2.gt.82.)x2h2=82.
14     if(x2h2.lt.-82.)x2h2=-82.
15     x1h1=x1*h1
16     if(x1h1.gt.82.)x1h1=82.
17     if(x1h1.lt.-82.)x1h1=-82.
18     x1h2=x1*h2
19     if(x1h2.gt.82.)x1h2=82.
20     if(x1h2.lt.-82.)x1h2=-82.
21     v11=exp(x1h1)
22     v12=exp(x1h2)
23     v21=exp(x2h1)
24     v22=exp(x2h2)
25     u1=(1.-v22)*(v12-1.)/(v22-v12)
26     n=c*r3/(2.*r*r+6.*r*n+3.*n*n)
27     a01=c*r/n/n*(2.*h2+u1*n*(6.*n+2.*r))
28     b01=c*r/n/n*(h2-u1*n*2.*r)
29     c01=c/2./n*(4.*h2+u1*n*6.*n)
30     d01=c*r*r/n/n/n*(h2+u1*n*2.*n)
31     u2=(v11-1.)*(1.-v21)/(v11-v21)
32     a10=c*r/n/n*(h1+u2*n*2.*r)
33     b10=c*r/n/n*(2.*h1-u2*n*2.*(3.*n+r))
34     c10=c/n*(2.*h1-u2*n*3.*n)
35     d10=c*r*r/n/n/n*(h1-u2*n*2.*n)
36     z00=c*c*r/4./n/n/n
37     z00=z00*(2.+(2.*r3*v11*v21-(r3+1.)*v21-(r3-1.)*v11)/(v11-v21))
38     e1=(1.-v11)/(v21-v11)
39     e2=(1.-v12)/(v22-v12)
40     e3=(1.-v21)/(v21-v11)
41     e4=(1.-v22)/(v22-v12)
42     z10=c*c*r/4./n/n/n*(8.+(r3-1.)*(e1+e2)+(r3+1.)*(e3+e4))
43     z11=c*c*r/4./n/n/n
44     z11=z11*(2.+(r3-1.)*e4*v12+(r3+1.)*e2*v22)
45     xn=2.*r011+r111+2.*a01+2.*c01+2.*a10+2.*d10
46     xn=xn+z00+z10+z11
47     xd=r000+3.*r100+3.*r011+r111
48     xd=xd+2.*(a01+b01+c01+d01+a10+b10+c10+d10)
49     xd=xd+(3.*n+r)/r*(z00+z10+z11)
50     s=xn/xd*c
51     return
52     end

```

## CONCLUSION

Nous nous sommes contentés de fournir les résultats en ne donnant qu'une partie des calculs. En fait, pour un système composé de  $n$  machines, il faut résoudre  $3^{n-1}$  systèmes différentiels ou aux dérivées partielles, ce qui devient vite impossible.

Les recherches ultérieures devraient donc s'orienter vers des méthodes d'approximation. Celles-ci peuvent être, en particulier, envisagées lorsque le taux de panne est faible par rapport au taux de réparation.

L'étude par simulation ne doit pas être rejetée a priori.

Enfin, il n'est pas exclu de hiérarchiser l'étude d'une suite de machines travaillant en séquence et séparées par des stocks tampons, en commençant par les machines séparées par des stocks tampons de faible niveau maximum et en approximant ce sous-système.

Notons enfin que les expressions analytiques obtenues font intervenir des exponentielles des niveaux maximaux des stocks tampons. On note donc des erreurs de chute pour les valeurs importantes de ces maxima.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BUZACOTT J.A., Automatic Transfer Lines with Buffer Stocks, The International Journal of Production Research (1967), vol. 5, n° 3.
- [2] BUZACOTT J.A., Markov chain analysis of automatic transfer line with buffer stock. Ph. D. Thesis, Department of Engineering Production, University of Birmingham.
- [3] FORESTIER J.P., Modélisation stochastique et comportement asymptotique d'un système automatisé de production. R.A.I.R.O. Automatique, vol. 14, n° 2, 1980, p. 127 à 143.
- [4] GERSHWIN S.B. and SCHICK I.C. (1980), Modeling and analysis of two -and three- stage transfer lines with unreliable machines and finite buffers. MIT Laboratory for Information and Decision Systems Report LIDS-R-1039.
- [5] GERSHWIN S.B., Analysis of transfer lines consisting of two unreliable machines with random processing times and finite storage buffers, AIIE Transaction, vol. 13, n° 1.
- [6] KAILAI CHUNG, Markov chains with stationary transition probabilities, Springer Verlag.
- [7] PROTH J.M., Study of two unreliable machines with random processing times and finite storage buffers : a Markovian approach, Working Paper 81-37, European Institute for Advanced Studies in Management, Brussels, Belgium (1981).

